

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

бакалавра

на тему *«Розв’язання рівняння Беллмана для деяких нелінійних систем»*

Виконав: студент групи МП41,
спеціальність
113 – Прикладна математика,
освітньо-професійна програма
«Прикладна математика»
Сдобнов А.Д.

Науковий керівник: доктор фіз.-мат. наук,
професор,
завідувач кафедри
прикладної математики
Харківського національного
університету
імені В. Н. Каразіна
Коробов В.І.

Рецензент: доктор технічних наук, доцент,
професор кафедри КІТАР
Харківського національного
університету радіоелектроніки
Ромашов Ю.В.

Харків — 2025 рік

Анотація

Сдобнов Артем Дмитрович. Розв’язання рівняння Беллмана для деяких нелінійних систем. У роботі розглянуто задачу швидкодії для деяких класів нелінійних керованих систем другого порядку. Основну увагу приділено застосуванню методів оптимального керування, зокрема принципу максимуму Понтрягіна та рівняння Беллмана. Проаналізовано умови оптимальності та наведено приклади побудови оптимальних траєкторій для нелінійних систем із заданими обмеженнями на керування. Дано аналітичний розв’язок для деяких класів нелінійних керованих систем другого порядку.

Ключові слова: рівняння Беллмана, принцип максимуму, швидкодія, керованість

Sdobnov Artem. On the solution of the Bellman equation for some nonlinear systems. The work examines the minimum-time problem for certain classes of second-order nonlinear control systems. The main focus is on the application of optimal control methods, in particular the Pontryagin Maximum Principle and the Bellman equation. Conditions for optimality are analyzed, and examples of constructing optimal trajectories for nonlinear systems with given control constraints are provided. An analytical solution is presented for specific classes of second-order nonlinear control systems.

Keywords: Bellman equation, maximum principle, minimum-time problem, controllability

Зміст

Вступ	4
0.1. Задача швидкодії	4
0.2. Принцип максимуму Понтрягіна	4
0.3. Рівняння Беллмана	5
0.4. Приклад розв’язання для канонічної системи	6
1. Розв’язання рівняння Беллмана та знаходження оптимального часу для нелінійної системи 2 порядку	10
2. Потрапляння не в точку спокою	16
3. Узагальнення системи	19
Список використаних джерел	24

Вступ

0.1. Задача швидкодії

Однією з основних задач теорії оптимального керування є пошук оптимальної швидкодії. Задача швидкодії полягає в пошуку такого керування, що переводить систему з певної початкової точку в певну кінцеву точку за мінімальний час. Тобто для системи $\dot{x} = f(x, u) = (f^1(x, u), f^2(x, u), \dots, f^n(x, u))$, $x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, $u \in \Omega$ та з граничними умовами $x(t_0) = x_0$ та $x(t_1) = x_1$, ми хочемо знайти таке керування $u_{opt} \in \Omega$, що система буде задовільняти граничним умовам та мінімізувати наступний функціонал:

$$\int_{t_0}^{t_1} 1 dt = t_1 - t_0 \rightarrow \min$$

0.2. Принцип максимуму Понтрягіна

В теорії оптимального керування принцип максимуму [3] є необхідною умовою оптимальності. Розглядається система $\dot{x} = f(x, u) = (f^1(x, u), f^2(x, u), \dots, f^n(x, u))$, $x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, $u \in \Omega$. Для неї шукається керування $u_{opt} \in \Omega$, таке що система буде задовільняти граничним умовам $x(t_0) = x_0$ та $x(t_1) = x_1$, а також наступний функціонал буде мінімізований:

$$\int_{t_0}^{t_1} f^0(x, u) dt \rightarrow \min$$

Для кожного керування u , яке задовільняє системі, існує нетривіальний

роз'язок $\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ спряженої системи:

$$\dot{\psi}_k = -\frac{\partial H}{\partial x^k}, k = 0, \dots, n$$

де $x^0 = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x, u) dt$, а $H(\psi, x, u) = \sum_{k=0}^n \psi_k f^k(x, u)$ - функція Гамільтона-Понтрягіна.

Відповідне оптимальне керування u_{opt} досягається при максимумі функції Гамільтона-Понтрягіна $H(\psi, x, u)$. Тобто:

$$H(\psi(t), x_{opt}(t), u_{opt}(t)) = \max_{u \in \Omega} H(\psi, x, u)$$

У випадку швидкодії $f^0(t) = 1 \Rightarrow \dot{\psi}_0 = 0 \Rightarrow \psi_0 = const$, тоді ми маємо, що функція Гамільтона-Понтрягіна $H(\psi, x, u) = \sum_{k=1}^n \psi_k f^k(x, u) + const$. Відповідно, коли ми будемо шукати максимум цієї функції, константа не буде впливати на результат, тому можна розглядати $H(\psi, x, u) = \sum_{k=1}^n \psi_k f^k(x, u)$, при цьому не шукаючи ψ_0 .

0.3. Рівняння Беллмана

Серед ідей динамічного програмування однією з основних є рівняння оптимального керування Беллмана, яке застосовується при розв'язанні актуальних задач у [4]. Розглядається $\dot{x} = f(x, u) = (f^1(x, u), f^2(x, u), \dots, f^n(x, u))$, $x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, $u \in \Omega$ та функція $T(x)$, яка визначає час потрапляння в кінцеву точку під дією цієї системи, тоді оптимальне керування $u_{opt} \in \Omega$ має задовільняти рівнянню Беллмана, яке у випадку швидкодії виглядає наступним чином:

$$\min_{u \in \Omega} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial T}{\partial x^k} f^k(x, u) \right) = -1$$

0.4. Приклад розв'язання для канонічної системи

Для початку розглянемо типовий приклад задачі швидкодії, з заданою системою, яка переводить довільну фіксовану точку в початок координат:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = u \\ |u| \leq 1 \end{cases}$$

Функція Гамільтона-Понтрягіна для заданої системи має наступний вигляд: $H = \psi_1 y + \psi_2 u$. Випишемо спряжену систему для ψ_1 та ψ_2 та розв'яжемо її:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 \end{cases}$$

Для констант $\tilde{c}_1$ та $\tilde{c}_2$ маємо, що:

$$\begin{cases} \psi_1 = \tilde{c}_1 \\ \psi_2 = -\tilde{c}_1 t + \tilde{c}_2 \end{cases}$$

Тоді відповідно функція Гамільтона-Понтрягіна $H(t) = \tilde{c}_1 y - \tilde{c}_1 u t + \tilde{c}_2 u$. За принципом максимуму оптимальна швидкодія досягається при максимумі функції $H(t)$:

$$\max_{|u| \leq 1} H(t) = \max_{|u| \leq 1} (\tilde{c}_1 y - \tilde{c}_1 u t + \tilde{c}_2 u) = \tilde{c}_1 y + \max_{|u| \leq 1} u(-\tilde{c}_1 t + \tilde{c}_2) = \tilde{c}_1 y + |-\tilde{c}_1 t + \tilde{c}_2|$$

Бачимо, що максимум досягається при $u = \text{sign}(-\tilde{c}_1 t + \tilde{c}_2)$. Тоді ми знаємо, що $u(t)$ це кусково-стала функція, яка приймає значення ± 1 . Розглянемо тепер функцію $-\tilde{c}_1 t + \tilde{c}_2$. Вона змінює знак не більше ніж 1 раз на будь-якому відрізку. Оскільки $u(t) = \text{sign}(-\tilde{c}_1 t + \tilde{c}_2)$, то $u(t)$ має не більше ніж одне перемикання.

Далі знайдемо траєкторії швидкодії. Нехай $T(x, y)$ - функція, яка означає час потрапляння з певної точки в початок координат. Розглядаємо рівняння Беллмана:

$$\min_{|u| \leq 1} \left[\frac{\partial T}{\partial x} y + \frac{\partial T}{\partial y} u \right] = -1$$

Спочатку розглянемо окремо керування $u = -1$. Підставимо у рівняння Беллмана і отримаємо: $\frac{\partial T}{\partial x} y - \frac{\partial T}{\partial y} = -1$.

Складемо рівняння характеристик в цьому випадку:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-1} = \frac{dT}{-1}$$

Звідси ми маємо: $dx = -ydy$ та $dy = dT$. Тепер проінтегруємо обидва вирази і отримаємо, що: $x = -\frac{1}{2}y^2 + c_1$ та $T = y + c_2$.

Аналогічно отримаємо для випадку керування $u = 1$, що траєкторія має вид $x = \frac{1}{2}y^2 + c_1$ та $T = -y + c_2$.

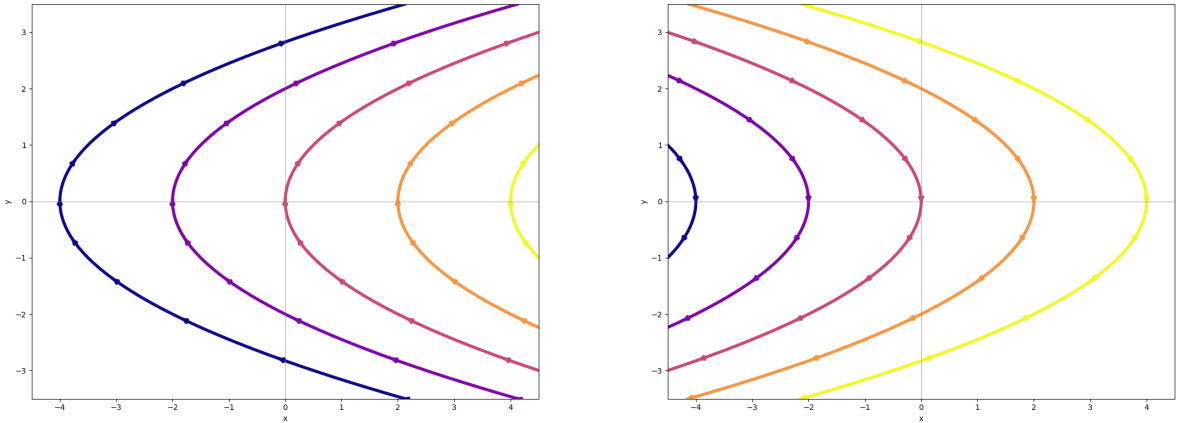


Рис. 1: Траєкторії для $u = \pm 1$

Для потрапляння в початок координат без перемикань існує тільки дві траєкторії, одна для $u = -1$, а саме $x = -\frac{1}{2}y^2$, та друга для $u = 1$, а саме $x = \frac{1}{2}y^2$. Таким чином, оскільки оптимальне керування має не більше одного перемикання, то щоб потрапити в початок координат, ми мусимо потрапити спочатку на одну з цих двох траєкторій, а потім, після перемикання,

потрапити в початок координат.

Оскільки непаралельні траєкторії мають тільки 2 точки перетину, які різного знаку по координаті y , то точка перетину, після якої ми можемо потрапити в початок координат, є єдиною. Відповідно існує єдина траєкторія для потрапляння в початок координат для кожної з точок.

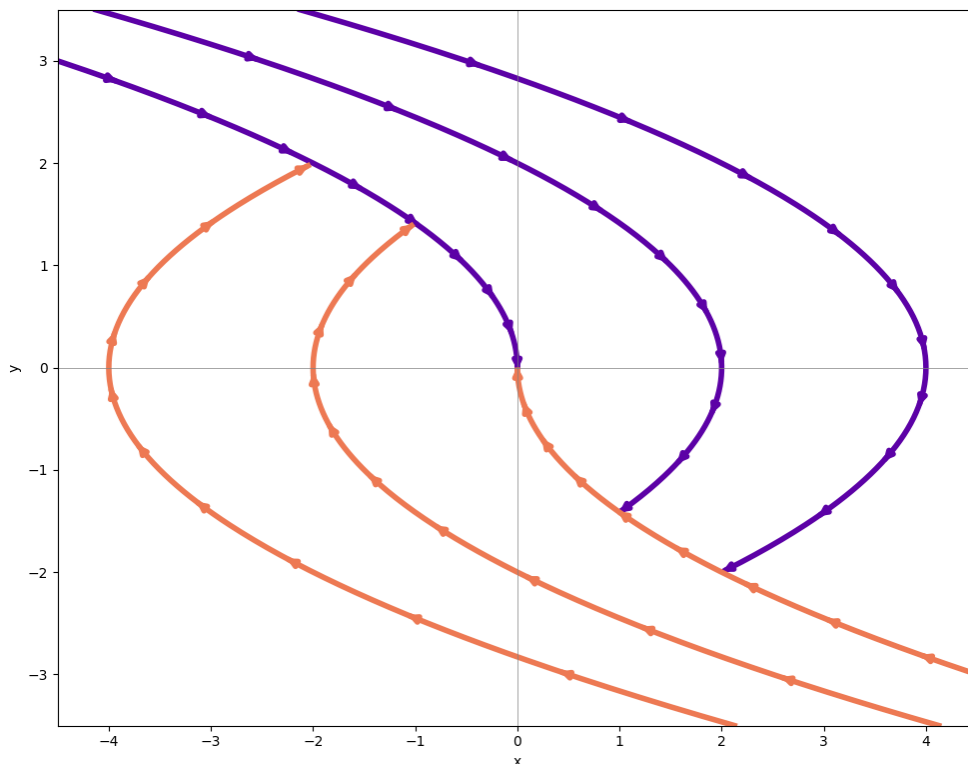


Рис. 2: Фазовий портрет(не більше 1 перемикання)

Далі знайдемо час, за який система приходить в початок координат, під дією оптимального керування. Для цього спочатку розглянемо точки, для яких оптимальне керування до перемикання $u = -1$, а після перемикання $u = 1$. Знайдемо точку перетину траєкторій - (x_i, y_i) , тобто точку в якій відбувається перемикання керування u . Оскільки ця точка лежить, на траєкторії, що проходить через початок координат, для котрої $u = 1$, то маємо, що $x_i = \frac{1}{2}y_i^2$, а також $T(x_i, y_i) = -y_i$, оскільки в початку координат $T(0, 0) = 0$. З іншого боку ця точка лежить на початковій траєкторії з початковою точкою, тобто $x_i = -\frac{1}{2}y_i^2 + c_1$ і $T(x_i, y_i) = y_i + c_2$. Підставивши

$x_i = \frac{1}{2}y_i^2$ та $T(x_i, y_i) = -y_i$ отримуємо, що $c_1 = y_i^2 = 2x_i$ та $c_2 = -2y_i$. Таким чином ми отримали залежність між константами для початкової траєкторії $c_2 = -2\sqrt{c_1}$.

Тепер розглянемо початкову точку (x_s, y_s) . Оскільки вона лежить на тій самій траєкторії, то $x_s = -\frac{1}{2}y_s^2 + c_1$ і $T(x_s, y_s) = y_s + c_2$. Звідси виразимо константи та підставимо в отриману залежність:

$$T(x_s, y_s) - y_s = -2\sqrt{x_s + \frac{1}{2}y_s^2}$$

Таким чином ми отримали оптимальний час:

$$T(x_s, y_s) = y_s - 2\sqrt{x_s + \frac{1}{2}y_s^2}$$

Провівши аналогічні обрахунки, отримуємо, що оптимальний час для точок, в яких оптимальне керування до перемикання $u = 1$, а після перемикання $u = -1$, дорівнює:

$$T(x_s, y_s) = -y_s + 2\sqrt{-x_s + \frac{1}{2}y_s^2}$$

Розділ 1

Розв’язання рівняння Беллмана та знаходження оптимального часу для нелінійної системи 2 порядку

Лінійні задачі швидкодії були детально досліджені у роботах [1] та [2]. В цій роботі ми хочемо розглянути не досліджені випадки задач швидкодії, а саме нелінійні системи за допомогою розв’язання рівняння Беллмана.

Будемо розглядати задачу швидкодії для наступної нелінійної системи:

$$\begin{cases} \dot{x} = y^n \\ \dot{y} = u \\ |u| \leq 1 \end{cases} \quad (1.1)$$

Основним випадком, для якого буде розв’язана задача швидкодії, є випадок непарного n . Але також для випадку парного n розберемо керованість, бо така система не буде повністю керованою, а також певний випадок, яким може бути керування u . В даній частині розглядається потрапляння з довільної фіксованої початкової точки в початок координат, під дією системи (1.1).

Ідейно розв’язувати будемо аналогічно до методу, яким ми розв’язували канонічну задачу в підрозділі 0.4. Тому почнемо з виписування функції Гамільтона-Понтрягіна $H = \psi_1 y^n + \psi_2 u$. Відповідна спряжена система має

наступний вигляд:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 n y^{n-1} \end{cases}$$

Почавши розв'язувати систему вище, отримаємо вираз для ψ_1 через константу $\tilde{c}_1$. Далі підставимо отриманий вираз в друге рівняння системи:

$$\begin{cases} \psi_1 = \tilde{c}_1 \\ \dot{\psi}_2 = -\tilde{c}_1 n y^{n-1} \end{cases}$$

Наразі ми не можемо в явному вигляді виписати, чому буде дорівнювати ψ_2 , але ми й далі можемо розглядати принцип максимуму, тобто будемо шукати максимум функції Гамільтона-Понтрягіна $H(t) = \tilde{c}_1 y^n + \psi_2 u$.

$$\max_{|u| \leq 1} H(t) = \max_{|u| \leq 1} (\tilde{c}_1 y^n + \psi_2 u) = \tilde{c}_1 y^n + \max_{|u| \leq 1} (\psi_2 u) = \tilde{c}_1 y^n + |\psi_2|$$

Тобто максимум досягається при $u = \text{sign}(\psi_2)$. Хоч ми і не можемо виписати розв'язок для ψ_2 , але можемо розглянути похідну $\dot{\psi}_2 = -\tilde{c}_1 n y^{n-1}$. За знак похідної відповідає тільки y , бо c_1 та n - константи. При непарному n маємо y у парному степені. Тобто y^{n-1} буде завжди невід'ємним. Це означає, що ψ_2 є монотонною, і відповідно ψ_2 змінює знак на будь-якому відрізку не більш ніж один раз. Тобто для непарного n оптимальне керування має не більше одного перемикання, так само як і було при розв'язанні задачі в підрозділі 0.4. У випадку парного n вираз y^{n-1} може змінювати знак при $y = 0$, і оцінки на одне перемикання ми дати не можемо, проте ми все одно розберемо випадок парного n з умовою на те, що кількість перемикань має бути не більше одного.

Наступним кроком ми знайдемо траєкторії швидкодії. Нехай $T(x, y)$ - функція, яка визначає час потрапляння з певної точки в початок коорди-

нат. Розглядаємо рівняння Беллмана:

$$\min_{|u| \leq 1} \left[\frac{\partial T}{\partial x} y^n + \frac{\partial T}{\partial y} u \right] = -1$$

Спочатку розглянемо окремо керування $u = -1$. Підставимо у рівняння Беллмана і отримаємо: $\frac{\partial T}{\partial x} y^n - \frac{\partial T}{\partial y} = -1$.

Складемо рівняння характеристик в цьому випадку:

$$\frac{dx}{y^n} = \frac{dy}{-1} = \frac{dT}{-1}$$

Звідси ми маємо: $dx = -y^n dy$ та $dy = dT$. Проінтегруємо обидва вирази і отримаємо, що: $x = -\frac{1}{n+1} y^{n+1} + c_1$ та $T = y + c_2$.

Аналогічно отримаємо для випадку керування $u = 1$, що траєкторія має вид $x = \frac{1}{n+1} y^{n+1} + c_1$ та $T = -y + c_2$.

Тепер розглянемо фазові портрети цих траєкторій, спочатку для непарного n :

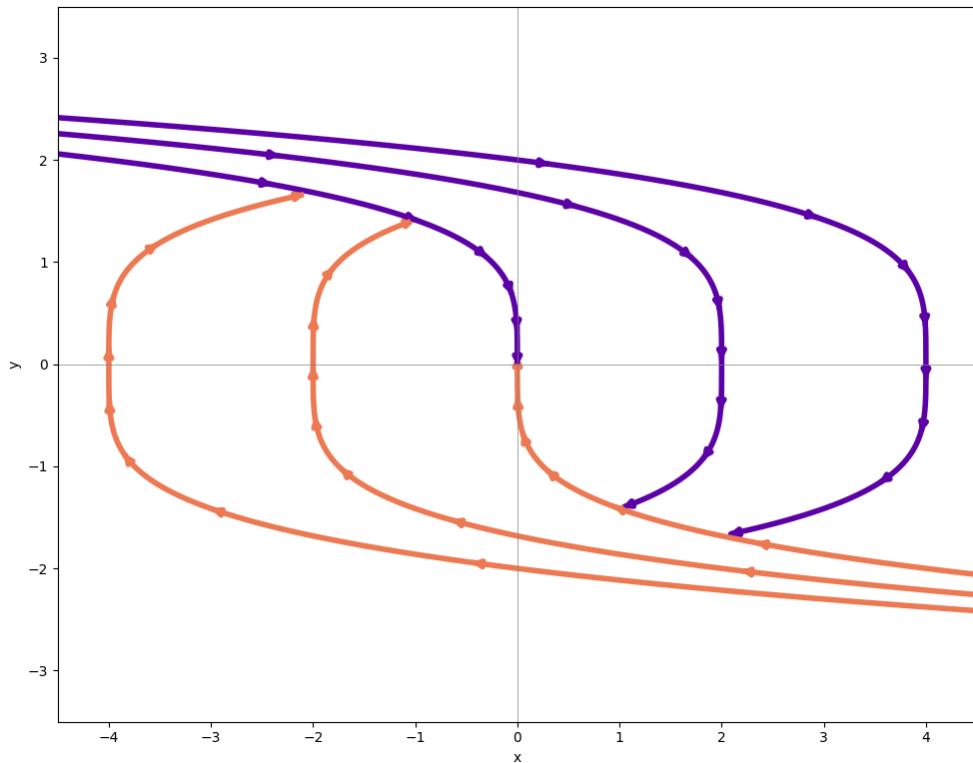


Рис. 1.1: Фазовий портрет для непарного випадку

Ситуація дуже схожа на канонічну задачу, розібрану вище в підрозділі 0.4. Щоб потрапити в початок координат, спочатку треба потрапити на одну з двох траєкторій, яка через нього проходить. Аналогічним чином для кожної точки існує єдина траєкторія для потрапляння в початок координат, бо непаралельні траєкторії мають тільки 2 точки перетину, які різного знаку по координаті y .

Далі розглянемо фазовий портрет для парного n . Спочатку розглянемо ті точки, де не існує керування, яке в силу системи (1.1) переведе в початок координат:

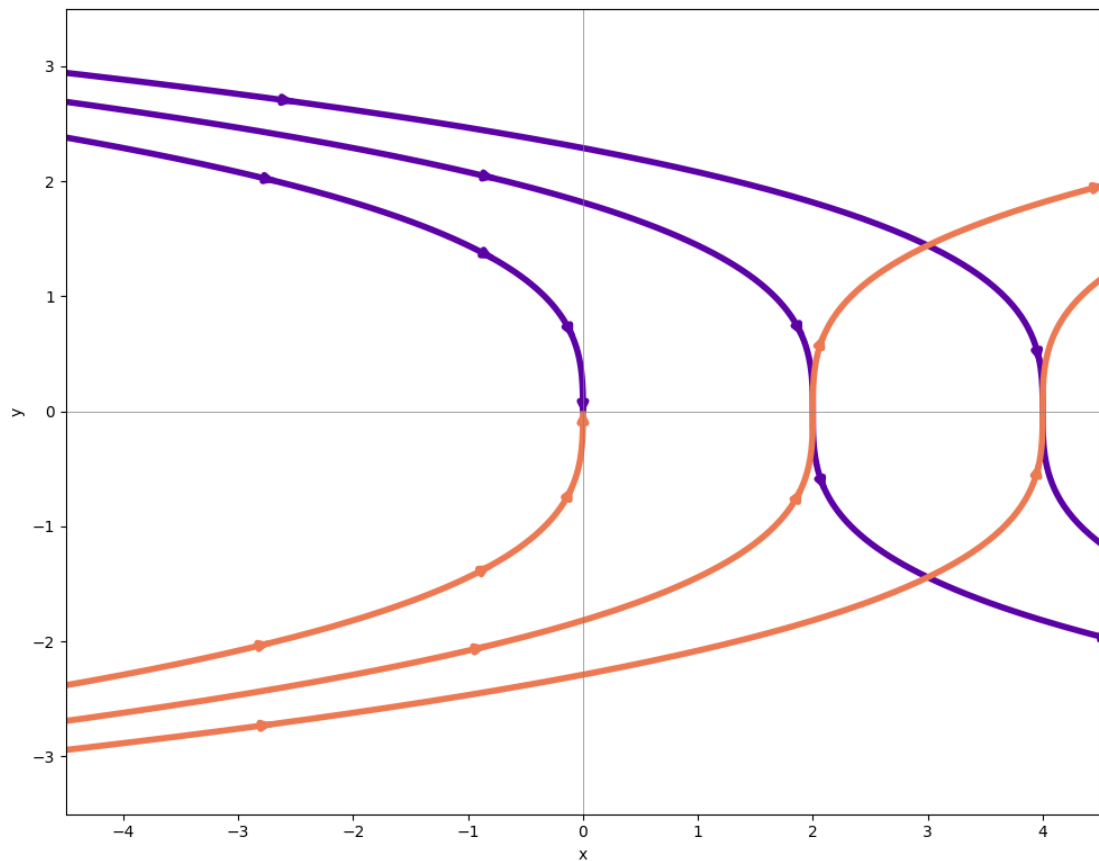


Рис. 1.2: Фазовий портрет для парного випадку, точки без керування

Така ситуація пов'язана з тим, що оскільки n - непарне, то x буде завжди зростати, бо похідна завжди додатня. А потрапити на траєкторію, яка веде в початок координат, неможливо, бо усі траєкторії паралельні одній з двох, які вже ведуть в початок координат. І відповідно, потрапивши на

траєкторію правіше за ці дві, повернутися не вийде.

Далі розглянемо точки, для яких існує керування, що переводить в початок координат.

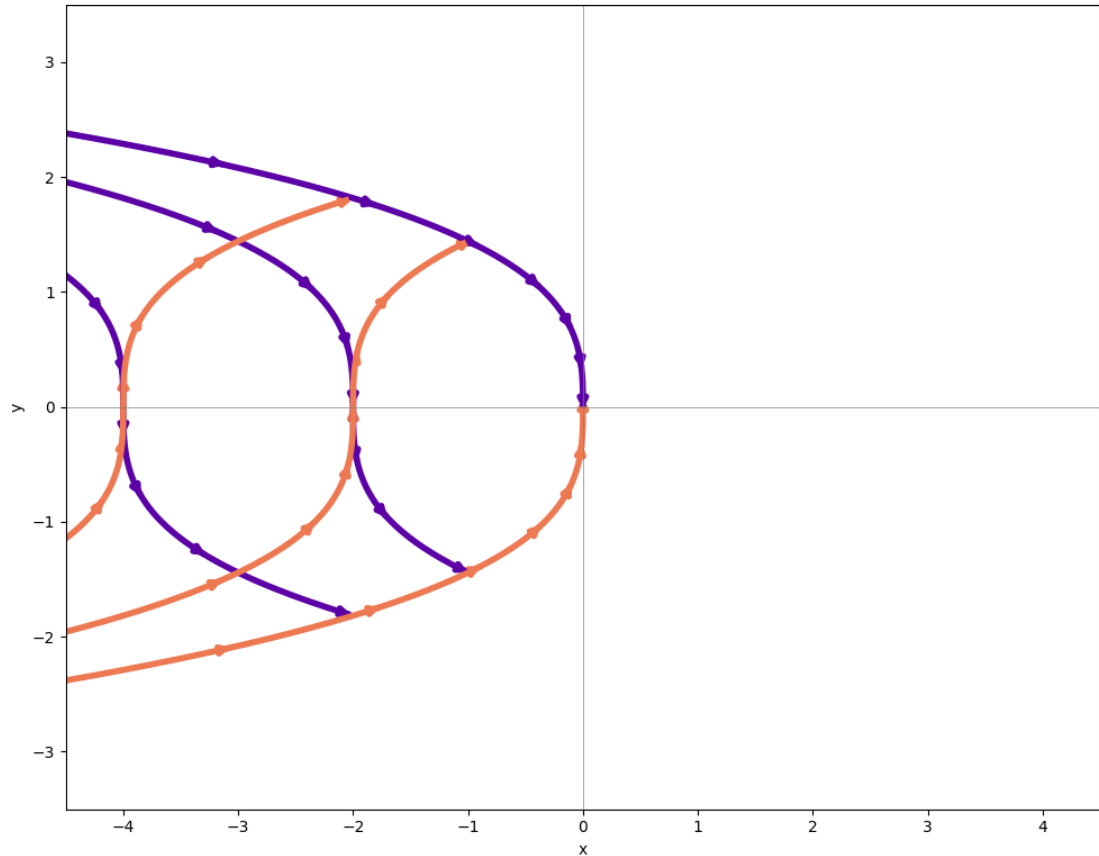


Рис. 1.3: Фазовий портрет для парного випадку, точки з керуванням

В даному випадку можна потрапити за одне перемикання в початок координат двома способами, в залежності від керування на початку $u = 1$ чи $u = -1$. Відповідно для кожної точки треба обрахувати, який з цих розв'язків більш оптимальний. Насправді можна, якщо розглянути симетричне відображення навколо вісі Ox керування у верхню частину, то це не змінить оптимального часу, тоді з самого початку можна було б розглядати тільки додатні y і для цієї задачі ψ_2 вже не змінювала би знак, а тому і ψ_2 було б монотонним, і тоді можна сказати, що оптимально керування мало б одне перемикання, а тоді і початкова б задача теж мала б мати одне перемикання.

Далі знайдемо час, за який система приходить в початок координат, під дією оптимального керування. Для цього спочатку розглянемо точки, для яких оптимальне керування до перемикання $u = -1$, а після перемикання $u = 1$. Знайдемо точку перетину траєкторій - (x_i, y_i) , тобто точку в якій відбувається перемикання керування u . Оскільки ця точка лежить на траєкторії, що проходить через початок координат, для котрої $u = 1$, то маємо, що $x_i = \frac{1}{n+1}y_i^{n+1}$, а також $T(x_i, y_i) = -y_i$, оскільки в початку координат $T(0, 0) = 0$. З іншого боку, ця точка лежить на початковій траєкторії з початковою точкою, тобто $x_i = -\frac{1}{n+1}y_i^{n+1} + c_1$ і $T(x_i, y_i) = y_i + c_2$. Підставивши $x_i = \frac{1}{n+1}y_i^{n+1}$ та $T(x_i, y_i) = -y_i$, отримуємо, що $c_1 = \frac{2}{n+1}y_i^{n+1} = 2x_i$ та $c_2 = -2y_i$. Таким чином, ми отримали залежність між константами для початкової траєкторії $c_2 = -2 \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{2}c_1}$.

Тепер розглянемо початкову точку (x_s, y_s) . Оскільки вона лежить на тій самій траєкторії, то $x_s = -\frac{1}{n+1}y_s^{n+1} + c_1$ і $T(x_s, y_s) = y_s + c_2$. Звідси виразимо константи та підставимо в отриману залежність:

$$T(x_s, y_s) - y_s = -2^{\frac{n}{n+1}} \sqrt[n+1]{(n+1)x_s + y_s^{n+1}}$$

Таким чином ми отримали оптимальний час:

$$T(x_s, y_s) = y_s - 2^{\frac{n}{n+1}} \sqrt[n+1]{(n+1)x_s + y_s^{n+1}}$$

Провівши аналогічні обрахунки, отримуємо, що оптимальний час для точок, в яких оптимальне керування до перемикання $u = 1$, а після перемикання $u = -1$, дорівнює:

$$T(x_s, y_s) = -y_s + 2^{\frac{n}{n+1}} \sqrt[n+1]{-(n+1)x_s + y_s^{n+1}}$$

Розділ 2

Потрапляння не в точку спокою

У цьому розділі ми будемо розглядати задачу швидкодії, для тієї ж самої системи, що і в розділі 1, але кінцевою точкою буде не початок координат, а довільна фіксована точка.

Тобто нехай задані початкова точка (x_s, y_s) та кінцева точка (x_f, y_f) . Ми шукаємо оптимальне керування, яке переведе початкову точку в кінцеву за мінімальний час під дією системи:

$$\begin{cases} \dot{x} = y^n \\ \dot{y} = u \\ |u| \leq 1 \end{cases}$$

Пошук оптимальних траєкторій та максимальної кількості перемикань оптимального керування u є таким самим як і у розділі 1, тому пропустимо цей етап, та перейдемо до пошуку оптимального часу.

Далі знайдемо час, за який система приходить в кінцеву точку, під дією оптимального керування. Для цього спочатку розглянемо точки, для який оптимальне керування до перемикання $u = -1$, а після перемикання $u = 1$. Знайдемо точку перетину траєкторій - (x_i, y_i) , тобто точку в якій відбувається перемикання керування u . Оскільки ця точка лежить на траєкторії, що проходить через кінцеву точку, для котрої $u = 1$, то маємо, що $x_i = \frac{1}{n+1}y_i^{n+1} + x_f - \frac{1}{n+1}y_f^{n+1}$, а також $T(x_i, y_i) = -y_i + y_f$, оскільки в кінцевій точці $T(x_f, y_f) = 0$. З іншого боку, ця точка лежить на початковій

траєкторії з початковою точкою, тобто $x_i = -\frac{1}{n+1}y_i^{n+1} + c_1$ і $T(x_i, y_i) = y_i + c_2$. Підставивши $x_i = \frac{1}{n+1}y_i^{n+1} + x_f - \frac{1}{n+1}y_f^{n+1}$ та $T(x_i, y_i) = -y_i + y_f$ отримуємо, що $c_1 = \frac{2}{n+1}y_i^{n+1} + x_f - \frac{1}{n+1}y_f^{n+1}$ та $c_2 = -2y_i + y_f$. Таким чином, ми отримали залежність між константами для початкової траєкторії $c_2 = -2 \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{2}c_1 - \frac{n+1}{2}x_f + \frac{1}{2}y_f^{n+1}} + y_f$.

Тепер розглянемо початкову точку (x_s, y_s) . Оскільки вона лежить на тій самій траєкторії, то $x_s = -\frac{1}{n+1}y_s^{n+1} + c_1$ і $T(x_s, y_s) = y_s + c_2$. Звідси виразимо константи та підставимо в отриману залежність:

$$T(x_s, y_s) - y_s = -2^{\frac{n}{n+1}} \sqrt[n+1]{(n+1)x_s + y_s^{n+1} - (n+1)x_f + y_f^{n+1}} + y_f$$

Таким чином ми отримали оптимальний час:

$$T(x_s, y_s) = y_s + y_f - 2^{\frac{n}{n+1}} \sqrt[n+1]{(n+1)x_s + y_s^{n+1} - (n+1)x_f + y_f^{n+1}}$$

Провівши аналогічні обрахунки, отримуємо, що оптимальний час для точок, в яких оптимальне керування до перемикання $u = 1$, а після перемикання $u = -1$, дорівнює:

$$T(x_s, y_s) = -y_s - y_f + 2^{\frac{n}{n+1}} \sqrt[n+1]{-(n+1)x_s + y_s^{n+1} - (n+1)x_f - y_f^{n+1}}$$

Варто зазначити, що в деяких випадках така система може мати по два варіанти траєкторій з одним перемиканням в залежності від того, як обрати керування спочатку $+1$ чи -1 . Для прикладу наводимо фазовий портрет, де з однієї червоної точки до іншої існують дві траєкторії. Щоб визначити швидшу, треба окремо дивитися, який з розв'язків швидший. Відповідно і функція часу в такому випадку може бути розривною.

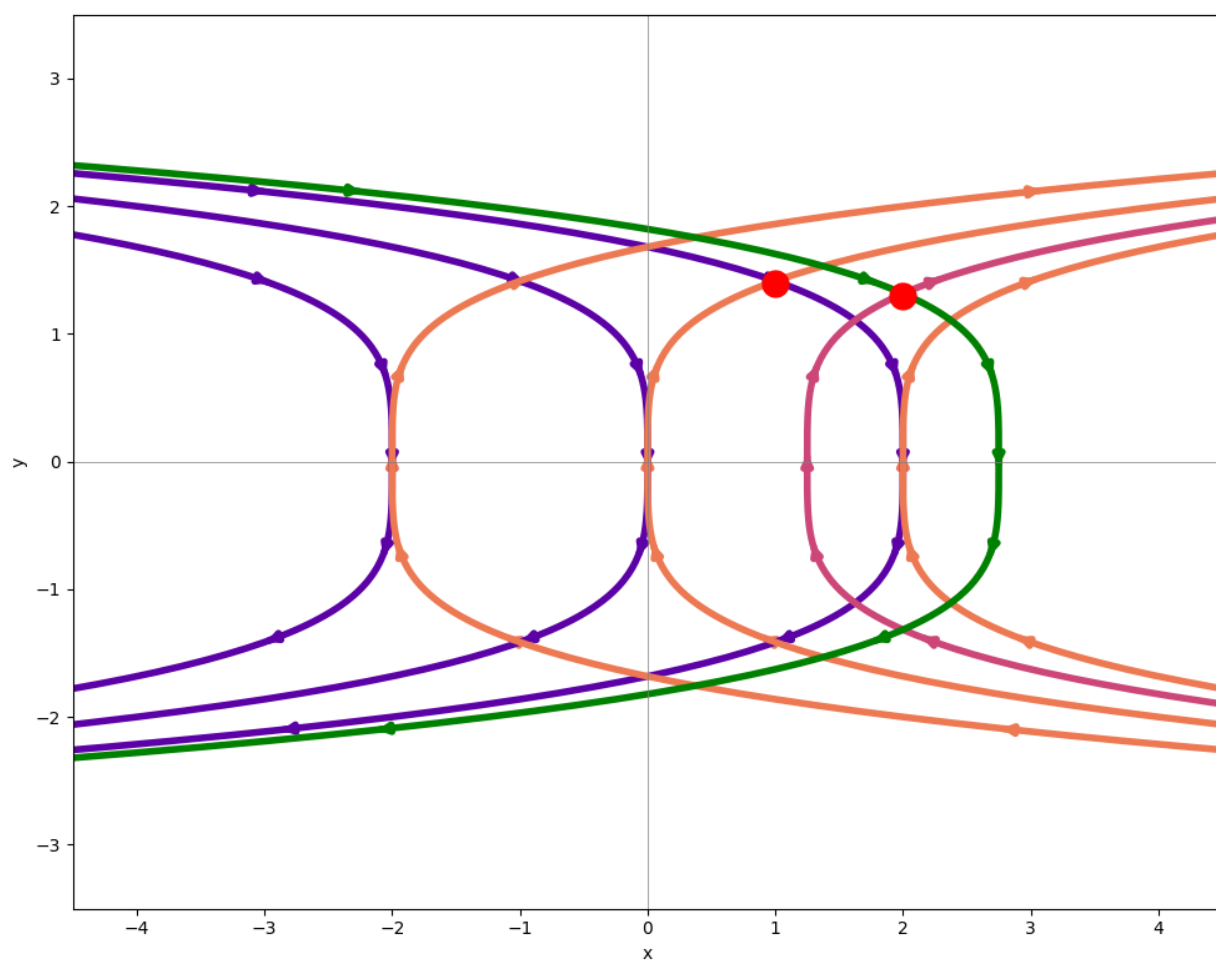


Рис. 2.1: Фазовий портрет для непарного випадку

Розділ 3

Узагальнення системи

В цьому розділі ми будемо розв'язувати трохи іншу систему, яка є узагальненням попередньої. Також для цього розділу ми обрали кінцевою точкою початок координат. Основні ідеї, які використовуються для пошуку розв'язку, будуть аналогічними вище наданим.

Розглядається наступна система:

$$\begin{cases} \dot{x} = y^n + c \\ \dot{y} = u \\ |u| \leq 1 \end{cases}$$

Спочатку для заданої системи випишемо функцію Гамільтона-Понтрягіна: $H = \psi_1(y^n + c)\psi_2u$. Випишемо спряжену систему:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 n y^{n-1} \end{cases}$$

Почавши розв'язувати систему вище, отримаємо вираз для ψ_1 через константу $\tilde{c}_1$. Далі підставимо отриманий вираз в друге рівняння системи:

$$\begin{cases} \psi_1 = \tilde{c}_1 \\ \dot{\psi}_2 = -\tilde{c}_1 n y^{n-1} \end{cases}$$

Наразі ми не можемо в явному вигляді виписати, чому буде дорівнювати ψ_2 , але ми й далі можемо розглядати принцип максимума, тобто будемо

шукати максимум функції Гамільтона-Понтрягіна $H(t) = \tilde{c}_1(y^n + c) + \psi_2 u$.

$$\max_{|u| \leq 1} H(t) = \max_{|u| \leq 1} (\tilde{c}_1(y^n + c) + \psi_2 u) = \tilde{c}_1(y^n + c) + \max_{|u| \leq 1} (\psi_2 u) = \tilde{c}_1(y^n + c) + |\psi_2|$$

Тобто максимум досягається при $u = \text{sign}(\psi_2)$. Хоч ми і не можемо виписати розв'язок для ψ_2 , але можемо розглянути похідну $\dot{\psi}_2 = -\tilde{c}_1 n y^{n-1}$. За знак похідної відповідає тільки y , бо $\tilde{c}_1$ та n - константи. При непарному n маємо y у парному степені. Тобто y^{n-1} буде завжди додатнім. Це означає, що ψ_2 є монотонною, і відповідно ψ_2 змінює знак на будь-якому відрізку не більш ніж один раз. Тобто для непарного n оптимальне керування має не більше одного перемикавання, так само як і було при розв'язанні задачі в підрозділі 0.4. У випадку парного n вираз y^{n-1} може змінювати знак при $y = 0$, і оцінки на одне перемикавання ми дати не можемо. Наступним кроком ми знайдемо траєкторії швидкодії. Нехай $T(x, y)$ - функція, яка визначає час потрапляння з певної точки в початок координат. Розглядаємо рівняння Беллмана:

$$\min_{|u| \leq 1} \left[\frac{\partial T}{\partial x}(y^n + c) + \frac{\partial T}{\partial y} u \right] = -1$$

Спочатку розглянемо окремо керування $u = -1$. Підставимо у рівняння Беллмана і отримаємо: $\frac{\partial T}{\partial x}(y^n + c) - \frac{\partial T}{\partial y} = -1$.

Складемо рівняння характеристик в цьому випадку:

$$\frac{dx}{y^n + c} = \frac{dy}{-1} = \frac{dT}{-1}$$

Звідси ми маємо: $dx = (-y^n + c)dy$ та $dy = dT$. Проінтегруємо обидва вирази і отримаємо, що: $x = -\frac{1}{n+1}y^{n+1} - cy + c_1$ та $T = y + c_2$.

Аналогічно отримаємо для випадку керування $u = 1$, що траєкторія має вид $x = \frac{1}{n+1}y^{n+1} + cy + c_1$ та $T = -y + c_2$.

Далі знайдемо час, за який система приходить в початок координат, під дією оптимального керування. Для цього спочатку розглянемо точки, для яких оптимальне керування до перемикання $u = -1$, а після перемикання $u = 1$. Знайдемо точку перетину траєкторій - (x_i, y_i) , тобто точку, в якій відбувається перемикання керування u . Оскільки ця точка лежить на траєкторії, що проходить через початок координат, для котрої $u = 1$, то маємо, що $x_i = \frac{1}{n+1}y_i^{n+1} + cy_i$, а також $T(x_i, y_i) = -y_i$, оскільки в початку координат $T(0, 0) = 0$. З іншого боку, ця точка лежить на початковій траєкторії з початковою точкою, тобто $x_i = -\frac{1}{n+1}y_i^{n+1} - cy_i + c_1$ і $T(x_i, y_i) = y_i + c_2$. Підставивши $x_i = \frac{1}{n+1}y_i^{n+1} + cy_i$ та $T(x_i, y_i) = -y_i$, отримуємо, що $c_1 = \frac{2}{n+1}y_i^{n+1} + 2cy_i = 2x_i$ та $c_2 = -2y_i$.

Тепер розглянемо початкову точку (x_s, y_s) . Оскільки вона лежить на тій самій траєкторії, то $x_s = -\frac{1}{n+1}y_s^{n+1} - cy_s + c_1$ і $T(x_s, y_s) = y_s + c_2$. Підставимо отриманий вище результат замість констант:

$$x_s + \frac{1}{n+1}y_s^{n+1} + cy_s = \frac{2}{n+1}y_i^{n+1} + 2cy_i \quad (3.1)$$

$$T(x_s, y_s) = y_s - 2y_i \quad (3.2)$$

Таким чином, щоб отримати оптимальний час, нам треба розв'язати (3.1) і підставити розв'язок в (3.2). Розглянемо рівняння (3.1) детальніше:

$$\frac{n+1}{2}x_s + \frac{1}{2}y_s^{n+1} + \frac{n+1}{2}cy_s = y_i^{n+1} + (n+1)cy_i$$

Ліва частина цього рівняння є константою, позначимо її d , тоді наше рівняння має вид:

$$d = y_i^{n+1} + (n+1)cy_i$$

Розглянемо функцію $g(x) = x^{n+1} + (n+1)cx - d$, а також її похідну

$g'(x) = (n+1)x^n + (n+1)c$. Знайдемо критичні точки цієї функції:

$$g'(x) = 0 \iff (n+1)x^n + (n+1)c = 0 \iff x^n = -c$$

У випадку непарного n рівняння $x^n = -c$ має рівно один корінь, тобто $g(x)$ має не більше одної критичної точки. Це означає, що екстремумів теж не більше одного, а значить і коренів в рівнянні $g(x) = 0$ не більше двох. Насправді в даному випадку як обидва корені можуть відповідати точці перетину з одним перемиканням, так і жоден з них.

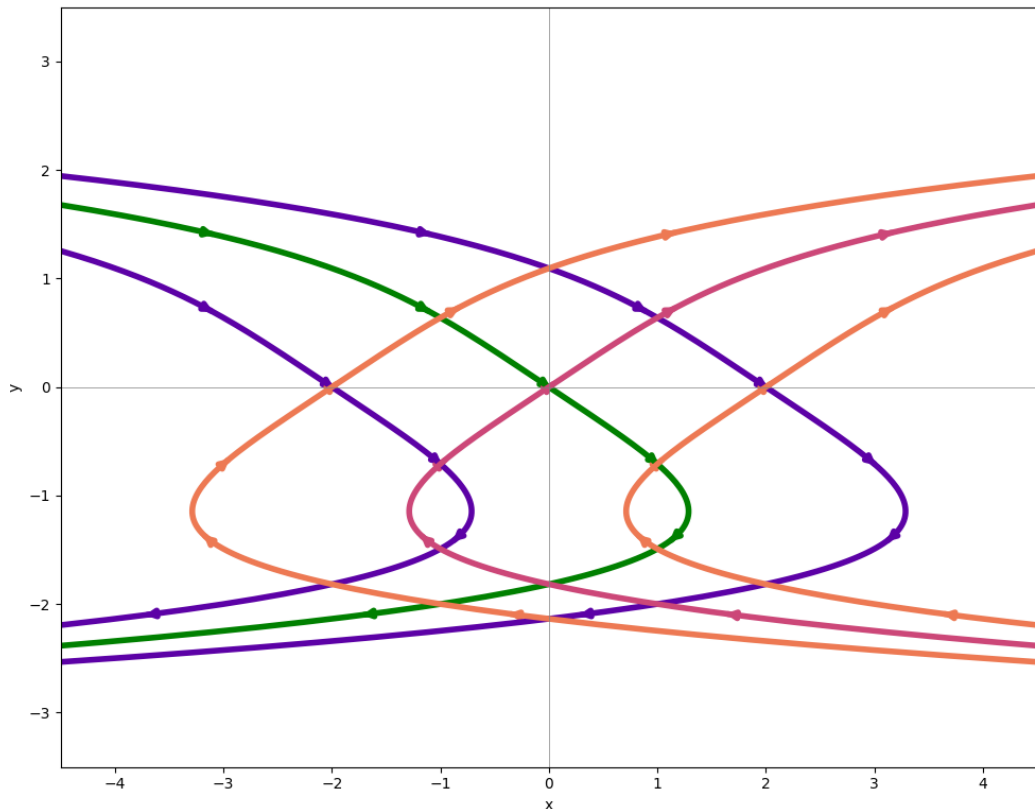


Рис. 3.1: Фазовий портрет для непарного випадку

Для випадку парного n рівняння $x^n = -c$ може або не мати коренів зовсім, або мати два корені в залежності від знаку c . Якщо коренів в нього немає, то $g(x)$ монотонна, тому і коренів в рівнянні $g(x) = 0$ не більше одного. Якщо коренів два, то критичних точок теж дві, тобто $g(x) = 0$ може мати не більше трьох коренів.

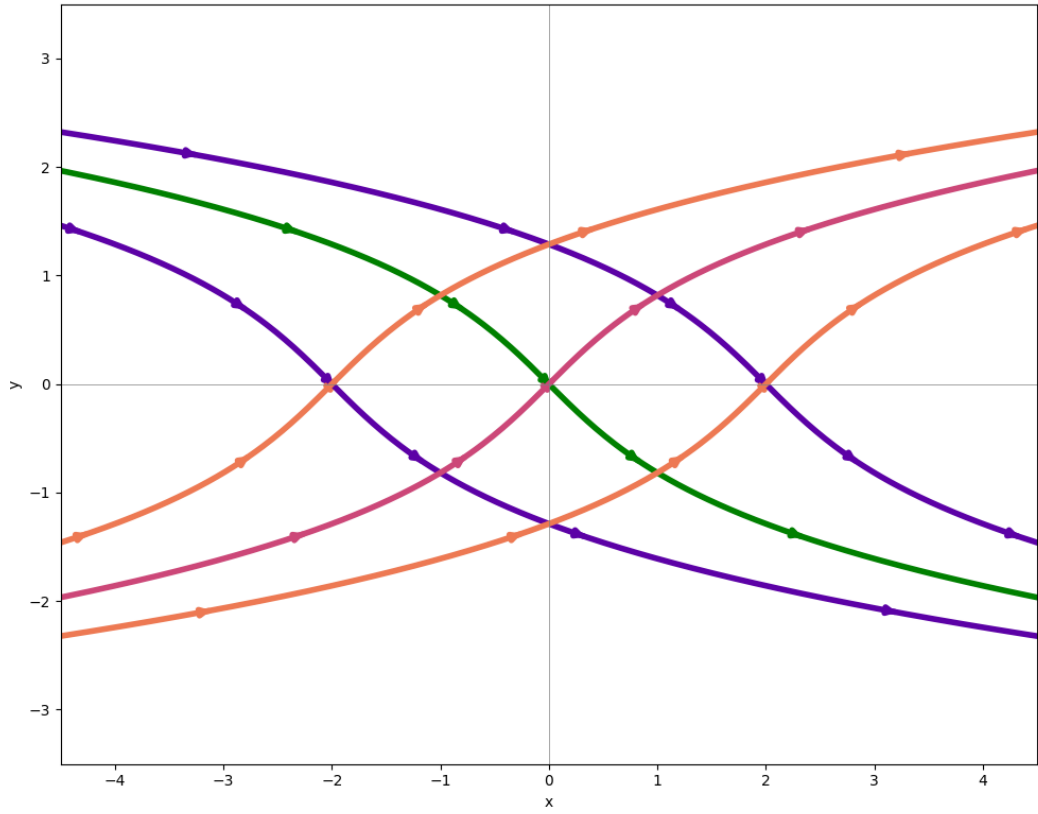


Рис. 3.2: Фазовий портрет для парного випадку з $c > 0$

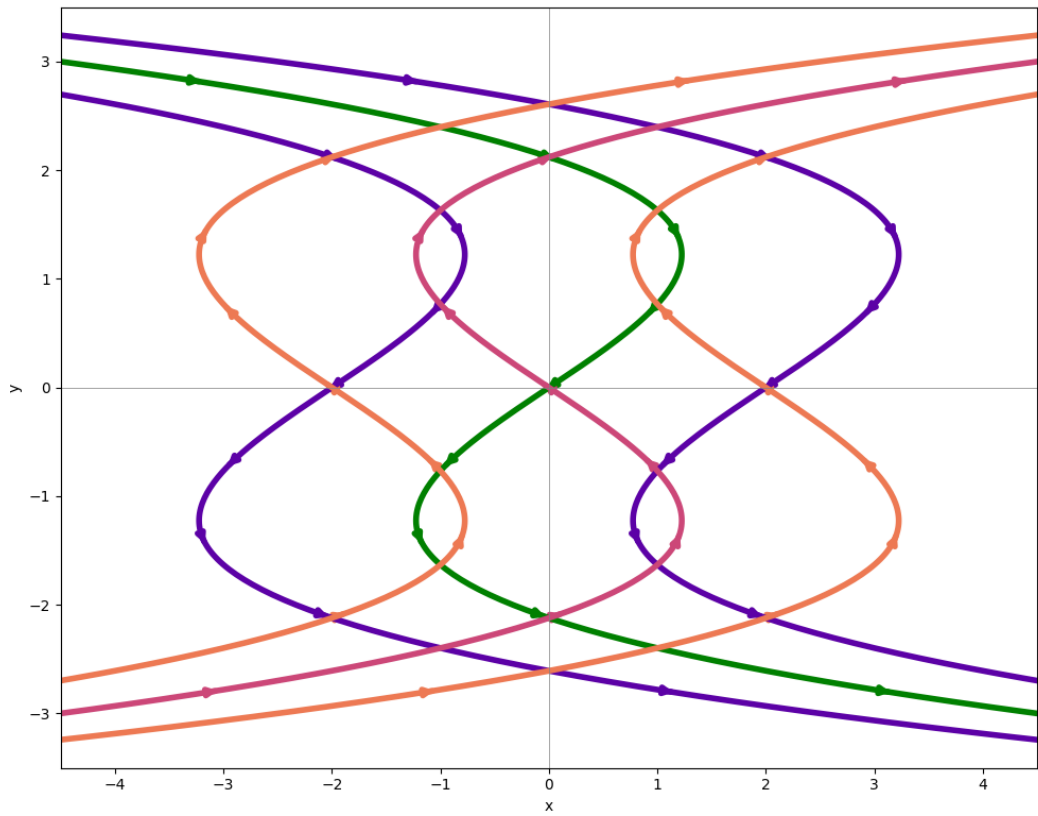


Рис. 3.3: Фазовий портрет для парного випадку з $c < 0$

Список використаних джерел

- [1] Korobov VI, Sklyar GM. Time optimality and the power moment problem, Math. USSR Sb. 1989;62(1):185-206
- [2] V.I. Korobov, V.O. Skoryk. Construction of Restricted Controls for a Non-equilibrium Point in Global Sense, Vietnam J. Math., 2015, Vol. 43, № 2, P. 459–469.
- [3] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, The Mathematical Theory of Optimal Processes. John Wiley & Sons. New York/London, 1962. 360 p.
- [4] V. Korobov, K. Stiepanova, The Peculiarity of Solving the Synthesis Problem for Linear Systems to a Non-Equilibrium Point, Журн. мат. фіз. анал. геом. 17 (2021), 326-340.